Københavns Universitets Økonomiske Institut

2. årsprøve 2018 V-2DM ex ret

Rettevejledning til skriftlig eksamen i Dynamiske Modeller

Torsdag den 18. januar 2018

Opgave 1. For ethvert $a \in \mathbf{R}$ betragter vi tredjegradspolynomiet $P : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = z^3 + (6+a)z^2 + (5+6a)z + 5a.$$

Desuden betragter vi differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} + (6+a)\frac{d^2x}{dt^2} + (5+6a)\frac{dx}{dt} + 5ax = 0,$$

og

$$(**) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} + 8\frac{d^2x}{dt^2} + 17\frac{dx}{dt} + 10x = 168e^{2t}$$

samt differentialligningen

$$(***) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} + 8\frac{d^2x}{dt^2} + 17\frac{dx}{dt} + 10x = 10t^2 + 54t + 80.$$

(1) Vis, at tallet $z = -1$ er rod i polynomiet P. Bestem dernæst samtlige rødder i polynomiet P.

Løsning. Ved indsættelse ser man, at $P(-1) = 0$, og ved polynomiers division opnår man dernæst, at

$$P(z) = (z+1)(z^2 + (a+5)z + 5a),$$

og da

$$z^2 + (a+5)z + 5a = 0 \Leftrightarrow z = -5 \,\vee\, z = -a,$$

har vi hermed fundet samtlige rødder i polynomiet P. Vi har således, at hvis $a \neq 1$ og $a \neq 5$, er der de tre simple rødder $z = -1, z = -5$ og $z = -a$. Hvis $a = 1$, er der rødderne $z = -1$ (med multiplicitet 2) og $z = -5$. Hvis $a = 5$, er der rødderne $z = -1$ og $z = -5$ (med multiplicitet 2).

(2) Bestem for ethvert $a \in \mathbf{R}$ den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$, og bestem de $a \in \mathbf{R}$, hvor $(*)$ er globalt asymptotisk stabil.

Løsning. Vi finder følgende resultater: Hvis $a \neq 1$ og $a \neq 5$, har vi, at

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-5t} + c_3 e^{-at}, \text{ hvor } c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R},$$

hvis $a = 1$, får vi, at

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + c_3 e^{-5t}, \text{ hvor } c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R},$$

og hvis $a = 5$, får vi, at

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-5t} + c_3 t e^{-5t}, \text{ hvor } c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}.$$

Differentialligningen $(*)$ er globalt asymptotisk stabil, dersom $a > 0$.

(3) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

Løsning. I differentialligningen $(**)$ er $a = 2$. Vi gætter på en løsning af formen $\hat{x} = Ae^{2t}$, og ved indsættelse opnår vi, at $A = 2$. Løsningen bliver derfor

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-5t} + c_3 e^{-2t} + 2e^{2t}, \text{ hvor } c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}.$$

(4) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(***)$.

Løsning. Også i dette tilfælde er $a = 2$. Vi gætter på en løsning af formen $\hat{x} = At^2 + Bt + C$. Ved indsættelse får vi, at $A = 1, B = 2$ og $C = 3$, så resultatet bliver

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-5t} + c_3 e^{-2t} + t^2 + 2t + 3, \text{ hvor } c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}.$$

For ethvert $\alpha \in \mathbf{R}$ betragter vi den homogene, lineære differentialligning

$$(****) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} + \alpha^2 \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + \alpha x = 0,$$

(5) Opstil Routh-Hurwitz matricen $A_3(\alpha)$ for differentialligningen $(****)$, og bestem de $\alpha \in \mathbf{R}$, hvor $(****)$ er globalt asymptotisk stabil.

Løsning. Vi ser, at Routh-Hurwitz matricen er

$$A_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & \alpha \end{pmatrix}.$$

De ledende hovedunderdeterminanter er $D_1 = \alpha^2, D_2 = 2\alpha^2 - \alpha = \alpha(2\alpha - 1)$ og $D_3 = \alpha^2(2\alpha - 1)$. Hvis de alle tre skal være positive, må vi kræve, at

$$\alpha \neq 0 \wedge \Big((\alpha > 0 \wedge \alpha > \frac{1}{2}) \vee (\alpha < 0 \wedge \alpha < \frac{1}{2})\Big) \wedge \alpha > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\alpha > \frac{1}{2}.$$

Opgave 2. Vi betragter vektorfunktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2, -x_1 + x_2^2).$$

(1) Bestem fixpunkterne for vektorfunktionen f. Altså de punkter $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, hvorom det gælder, at $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$.

Løsning. Vi finder, at

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \Leftrightarrow x_1^2 - x_2 = x_1 \wedge -x_1 + x_2^2 = x_2 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = x_2^2 - x_2 \wedge (x_2^2 - x_2)^2 - x_2 = x_2^2 - x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2^2 - x_2 \wedge x_2^4 - 2x_2^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = x_2^2 - x_2 \wedge (x_2 = 0 \vee x_2 = 2) \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (0, 0) \vee (x_1, x_2) = (2, 2).$$

(2) Bestem Jacobimatricen $Df(x_1, x_2)$ for vektorfunktionen f i et vilkårligt punkt $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}$, og bestem, i hvilke punkter denne matrix er regulær.

Løsning. Vi ser, at

$$Df(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -1 \\ -1 & 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Vi ser nu, at $\det Df(x_1, x_2) = 4x_1x_2 - 1$, så $Df(x_1, x_2)$ er regulær, når og kun når

$$\Big(x_2 \neq \frac{1}{4x_1} \wedge x_1 \neq 0\Big) \vee x_1 = 0.$$

(3) Angiv differentialet $df(1,1)$ for vektorfunktionen f ud fra punktet $(1,1)$.

Løsning. Vi finder, at

$$df(1,1) = Df(1,1)\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 - 1 \\ -x_1 + 2x_2 - 1 \end{pmatrix}.$$

(4) Løs ligningen

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = f(1,1) + df(1,1)$$

med hensyn til $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Løsning. Idet $f(1,1) = \underline{0}$, får vi, at

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = f(1,1) + df(1,1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 - 1 \\ -x_1 + 2x_2 - 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + 1 \\ \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Betragt mængden $M =$

$\{(x_1, x_2) \in [0,1]^2 \mid (x_2 = 0, \text{ hvis } x_1 \notin \mathbf{Q}) \vee (x_2 \in [0,1], \text{ hvis } x_1 \in \mathbf{Q})\}$.

(5) Vis, at mængden $f(\overline{M})$ er kompakt.

Løsning. Idet $M \subset [0,1]^2$, og idet M ligger tæt i $[0,1]^2$, ser vi, at $\overline{M} = [0,1]^2$. Dermed har vi godtgjort, at $\overline{M}$ er kompakt. Da vektorfunktionen f er kontinuert, er mængden $f(\overline{M})$ naturligvis kompakt.

(6) Vis, at mængden $\overline{f(M)}$ er kompakt.

Løsning. Da $M \subset \overline{M}$, er det klart, at $f(M) \subseteq f(\overline{M})$, og heraf finder vi, at mængden $\overline{f(M)}$ er både afsluttet og begrænset. Altså er $\overline{f(M)}$ kompakt.

Opgave 3. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : f(z) = z^2 - z.$$

(1) Bestem funktionsværdierne $f(i)$, $f(-i)$ og $\frac{f(i)}{f(-i)}$.

Løsning. Vi udregner, at $f(i) = -1 - i$, $f(-i) = -1 + i$ og

$$\frac{f(i)}{f(-i)} = \frac{-1-i}{-1+i} = \frac{(-1-i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = i.$$

(2) Løs ligningen $f(z) = z$.

Løsning. Vi ser, at

$$f(z) = z \Leftrightarrow z^2 - 2z = 0 \Leftrightarrow z = 0 \,\vee\, z = 2.$$

(3) Løs ligningen $f(z) = iz - z^3$.

Løsning. Vi ser, at

$$f(z) = iz - z^3 \Leftrightarrow z^3 + z^2 - (1+i)z = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5+4i}.$$

Idet $w^2 = 5 + 4i$, er

$$w = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{41}+5}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{41}-5}{2}}\right),$$

så

$$z = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\sqrt{41}+5}{8}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{41}-5}{8}} \vee z = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\sqrt{41}+5}{8}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{41}-5}{8}}.$$

Vi betragter torussen

$$\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$$

og den funktion $g : \mathbf{T} \to \mathbf{C}$, som er defineret ved udtrykket

$$\forall\, t \in \mathbf{T} : g(t) = f(t).$$

(4) Vis, at billedmængden $g(\mathbf{T})$ er kompakt.

Løsning. Da torussen $\mathbf{T}$ er kompakt, og da g er en kontinuert funktion, er billedmængden $g(\mathbf{T})$ kompakt.

(5) Lad (t_k) være en vilkårlig følge af punkter fra torussen $\mathbf{T}$. Vis, at denne følge har en konvergent delfølge (t_{n_p}) med grænsepunkt $t_0 \in \mathbf{T}$.

Vis desuden, at billedfølgen $(g(t_k))$ har en konvergent delfølge $(g(t_{k_p}))$ med et grænsepunkt t^*, og begrund, at $|t^*| \leq 2$.

Løsning. Da torussen $\mathbf{T}$ er kompakt, har følgen (t_k) en konvergent delfølge (t_{k_p}) med grænsepunkt $t_0 \in \mathbf{T}$. Da funktionen g er kontinuet, ser vi, at følgen $(g(t_{k_p}))$ er konvergent med grænsepunkt $t^* = g(t_0)$.

Vi ser tillige, at

$$|t^*| = |g(t_0)| \leq |t_0|^2 + |t_0| = 2.$$

(6) Angiv en følge (t_k) på $\mathbf{T}$, så $t^* = 2$.

Løsning. For enhver konvergent følge (t_k) på $\mathbf{T}$, som har grænsepunktet $t_0 = -1$, gælder det, at $t^* = 2$.

Opgave 4. Vi betragter integralet

$$I(x) = \int_0^1 \left(\dot{x}^2 + \frac{1}{2}x^2 + 4xe^t \right) dt,$$

hvor $x(0) = 4$ og $x(1) = 5e$.

Idet vi skal optimere dette integral, er der tale om et variationsproblem med integranden

$$F(t, x, \dot{x}) = \dot{x}^2 + \frac{1}{2}x^2 + 4xe^t.$$

(1) Vis, at dette variationsproblem er et minimumsproblem.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x + 4e^t \quad \text{og} \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}.$$

Da er Hessematricen mht. $(x, \dot{x})$ givet ved

$$F'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vi ser, at F'' er positiv definit, så der er tale om et minimumsproblem.

(2) Løs dette variationsproblem.

Løsning. Vi opstiller Euler-Lagranges differentialligning

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \Leftrightarrow x + 4e^t - 2\ddot{x} = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} - \frac{1}{2}x = 2e^t.$$

Den tilhørende homogene differentialligning har det karakteristiske polynomium $P(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{2}$, så de karakterisiske rødder er $\lambda = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. En speciel løsning til den inhomogene differentialligning er funktionen $\hat{x}(t) = ke^t$, og ved indsættelse finder vi, at $k = 4$. Altså har vi, at

$$x = Ae^{\sqrt{\frac{1}{2}}t} + Be^{-\sqrt{\frac{1}{2}}t} + 4e^t, \text{ hvor } A, B \in \mathbf{R}.$$

Idet $x(0) = 4$, får vi, at $B = -A$, så

$$x = A\left(e^{\sqrt{\frac{1}{2}}t} - Be^{-\sqrt{\frac{1}{2}}t}\right) + 4e^t, \text{ hvor } A, \in \mathbf{R}.$$

Idet $x(1) = 5e$, finder vi, at $A = \frac{e}{e^{\sqrt{\frac{1}{2}}} - e^{-\sqrt{\frac{1}{2}}}}$. Heraf finder vi, at

$$x^* = \frac{e}{e^{\sqrt{\frac{1}{2}}} - e^{-\sqrt{\frac{1}{2}}}}\left(e^{\sqrt{\frac{1}{2}}t} - Be^{-\sqrt{\frac{1}{2}}t}\right) + 4e^t.$$